Temat: Suma n - początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Proszę zapoznać się z treścią podręcznika na stronie 215 oraz ze wzorem na S_n w twierdzeniu.

Na podstawie przykładu 2 na stronie 216 proszę wykonać Ćw 3 ~~przykład~~ a) i b).

Rozwiązanie ćw 5 s 216

a) Na podstawie twierdzenia mamy $S_n = \frac{2a_1+(n-1)r}{2} \cdot n$

oraz $a_1=3$, $a_2=7$, $a_3=11$. Zauważmy, że $r=a_2-a_1=4$

Zatem $S_{31} = \frac{2 \cdot a_1+(31-1) \cdot r}{2} \cdot 31 = \frac{2 \cdot 3 + 30 \cdot 4}{2} \cdot 31 = 1953$

Proszę wykonać przykład b Ćw 5 / 216.

Rozwiązanie Ćw 8 s 217

c) $a_1=-5$, $a_2=-7$, $a_3=-9$, ..., $a_{n-1}=-29$, $a_n=-31$

oraz $r=a_2-a_1=-7-(-5)=-2$.

zauważmy, że jeśli ciąg jest arytmetyczny, to każdy jego wyraz spełnia warunek $a_n=a_1+(n-1) \cdot r$. Nie wiadomo, którym wyrazem ciągu jest wyraz -31, zatem należy to sprawdzić: $-31=a_1+(n-1) \cdot r \Leftrightarrow -31=-5+(n-1) \cdot (-2)$

$$-31=-5-2n+2$$
$$-31=-3-2n$$
$$-28=-2n$$
$$n=14$$

Zatem $-31=a_{14}$, należy więc obliczyć S_{14}:

$$S_{14} = \frac{a_1+a_{14}}{2} \cdot 14 = \frac{-5+(-31)}{2} \cdot 14 = -18 \cdot 14 = \underline{-252}.$$

Proszę wykonać Ćw 8 a) i d)

Rozwiązanie zad. 1 s 217

c) $a_2=12$ i $a_4=0$

Szukane: $a_1=?$, $a_{10}=?$, $S_{10}=?$

Zauważmy, że jeśli ciąg a_n jest arytmetyczny, to

$\begin{cases} a_2=a_1+r \\ a_4=a_1+3r \end{cases}$ stąd $-\begin{cases} 12=a_1+r \\ 0=a_1+3r \end{cases}$

$12=-2r$

$\underline{r=-6}$

$0=a_1+3\cdot(-6)$

$\underline{a_1=18}$

$a_{10}=a_1+9r=18+9\cdot(-6)=18-54=-36$

$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10=\frac{18+(-36)}{2}\cdot 10=-90$

Proszę wykonać przykład a) zad. 1 s 217

Rozwiązanie zadania 2 s. 217

a) $100\le n<200$

Chodzi zatem o liczby $100, 101, \ldots, 198, 199$.

Niech $a_1=100$, $a_2=101$, wtedy $r=1$ i ciąg liczb jest arytmetyczny, bo każda następna liczba jest o 1 większa od poprzedniej liczby 199, zatem nie wiadomo którym wyrazem ciągu jest liczba 199, zatem

w myśl ćw 8 c) s 217 $a_n=199$ i $a_n=a_1+(n-1)r$, zatem:

$199=100+(n-1)\cdot 1 \Leftrightarrow 199-100=n-1 \Leftrightarrow n=100$, czyli

$a_{100}=199$. Należy wyjść policzyć $S_{100}=\frac{a_1+a_{100}}{2}\cdot 100=\frac{100+199}{2}\cdot 100=14950$

Proszę wykonać przykład b zad 2 s 217.

Rozwiązanie zadania 2 s 217 c)

Liczby dwucyfrowe nieparzyste zaczynają się od 11 a kończą na 99. Zatem $a_1=11$, $a_2=13$, $a_3=15$, …, $a_n=99$. Liczby tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r=a_2-a_1=13-11=2$ oraz

$a_n=a_1+(n-1)r$, wówczas $99=11+(n-1)\cdot 2 \Leftrightarrow 99-11+2=2n$

$n=45$
zatem $a_{45}=99$

Należy zatem obliczyć $S_{45}=\frac{a_1+a_{45}}{2}\cdot 45=\frac{11+99}{2}\cdot 45=2475$.

Rozwiązanie zadania 3 s 218

b) Liczby naturalne większe od 10 i mniejsze od 80, których reszta z dzielenia przez 4 wynosi 3 można zapisać następująco:

$$10<4n+3<80 \quad /-3$$

$$7<4n<77 \quad /:4$$

$$1\tfrac{3}{4}<n<19\tfrac{1}{4}$$

zatem $n=2,3,\ldots,19$ i jest ich $19-1=18$

Należy wówczas jeszcze $a_1=4\cdot 2+3=11$ (bo n rozpoczyna się od 2) oraz $a_{18}=4\cdot 19+3=79$ (bo n kończy się na 19)

Stąd $S_{18}=\frac{a_1+a_{18}}{2}\cdot 18=\frac{11+79}{2}\cdot 18=\underline{810}$.

Proszę podobnie wykonać zad. 3 s 218 punkt a)

b) Aby policzyć sumę wszystkich liczb trzycyfrowych niepodzielnych przez 3 należy najpierw obliczyć sumę wszystkich liczb trzycyfrowych, a następnie odjąć od niej sumę wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3. Należy więc obliczyć dwie sumy.

Policzymy najpierw sumę wszystkich liczb trzycyfrowych.
Zauważmy, że $a_1=100,\ a_2=101,\ \dots,\ a_n=999$ oraz $r=1$,

a także $999=a_1+(n-1)r \iff 999=100+(n-1)\cdot 1 \iff n=900$, zatem

$a_{900}=999$ oraz $S_{900}=\frac{a_1+a_{900}}{2}\cdot 900=\frac{100+999}{2}\cdot 900=494550$

Policzymy teraz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3
Muszą one spełniać warunek

$100 \le 3n \le 999 \,/:3$

$33\frac{1}{3} \le n \le 333$

$n=34, 35, \dots, 333$

jest ich $333-33=300$

Oraz $b_1=3\cdot 34=102$ i $b_{300}=999$, zatem $S_{300}=\frac{102+999}{2}\cdot 300=165150$.

Suma wszystkich liczb trzycyfrowych niepodzielnych przez 3 wynosi

$S_{900}-S_{300}=494550-165150=329400$.

Proszę wykonać analogicznie przykład a)

Rozwiązanie zadania 5S218

b) Obliczymy sumę wszystkich liczb naturalnych podzielnych przez 4 lub 9 mniejszych niż 1001.

Należy zatem obliczyć sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych niż 1001 podzielnych przez 4. Spełniają one więc warunek

$$0 \leq 4n \leq 1000 \quad |:4$$
$$0 \leq n \leq 250$$

stąd $n = 0, 1, \ldots, 250$. Jest ich 251 oraz $a_1 = 4 \cdot 0 = 0$ i $a_{251} = 4 \cdot 250 = 1000$ zatem

$$S_{251} = \frac{0+1000}{2} \cdot 251 = 500 \cdot 251 = 125500$$

Obliczymy teraz sumę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych mniejszych niż 1001 podzielnych przez 9. Spełniają one warunek:

$$0 \leq 9k \leq 1000 \quad |:9$$
$$0 \leq k \leq 111\tfrac{1}{9}$$

$k = 0, 1, \ldots, 111$ jest ich zatem 112

oraz $b_1 = 9 \cdot 0 = 0$, $b_{112} = 9 \cdot 111 = 999$ oraz $S_{112} = \frac{0+999}{2} \cdot 112 = 55944$

Należy zauważyć, że wśród liczb podzielnych przez 4 pojawią się też liczby podzielne przez 9, a wśród liczb podzielnych przez 9 pojawią się te podzielne przez 4. Jeśli więc zsumujemy wszystkie liczby podzielne przez 4 i przez 9 zdublują się liczby podzielne przez 4 i 9 jednocześnie. Należy je więc odjąć, stąd trzeba policzyć sumę liczb podzielnych jednocześnie przez 4 i 9 czyli podzielne przez ich iloczyn $4 \cdot 9 = 36$. Stąd $0 \leq 36p \leq 1000 \; |:36$

$0 \leq p \leq 27\tfrac{28}{36}$

$p = 0, 1, \ldots, 27$ jest ich więc 28 razem oraz

$c_1 = 36 \cdot 0 = 0$ i $c_{28} = 36 \cdot 27 = 972$ oraz $S_{28} = \frac{c_1 + c_{28}}{2} \cdot 28 = \frac{0+972}{2} \cdot 28 = 13608$.

Stąd suma wszystkich liczb trzycyfrowych mniejszych niż 1001 podzielnych przez 4 lub 9 wynosi $S_{251} + S_{112} - S_{28} = 125500 + 55944 - 13608 = 167836$

Proszę wykonać analogicznie przykład a) zadania 5 s 218.

Rozwiązanie zadanie 7 s 218 b)

$a_1 = -24,\ a_2 = -22, \ldots\ldots, a_n (=?)$

$r = a_2 - a_1 = -22 - (-24) = 2$ zatem $a_n = a_1 + (n-1)r = -24 + (n-1)\cdot 2$

$a_n = -24 + 2n - 2 = -26 + 2n$

stąd $S_n = 546 \Leftrightarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Leftrightarrow 546 = \frac{-24 + (-26 + 2n)}{2} \cdot n \ \Big|\cdot 2$

$1092 = (-24 - 26 + 2n)\cdot n$

$1092 = (-50 + 2n)\cdot n$

$1092 = -50n + 2n^2$

$2n^2 - 50n - 1092 = 0 \ |:2$

$\cancel{\Delta} \ n^2 - 25n - 546 = 0$

$\Delta = 625 - 4\cdot(-546) = 2809$

$625 + 2184$

$\sqrt{\Delta} = 53$

$n_1 = \frac{25 - 53}{2} = -14$ odpada, bo $n \in N_+$

$n_2 = \frac{25 + 53}{2} = \underline{\underline{39}}$

Odp. Suma 39-ciu wyrazów ciągu wynosi 546.

Proszę wykonać przykład a) zadania 7 s 218.

Rozwiązanie zadania 8 s 218

b) lewa strona równania jest sumą pewnej liczby wyrazów ciągu

$a_1 = \underline{1}+x$ zauważamy, że wyrazów jest 50, bo od $\underline{1}+x$ do $\underline{50}+99x$

$a_2 = \underline{2}+3x$

$\vdots$

$a_n = \underline{\underline{50}}+99x$ stąd $a_{50} = 50+99x$

Ciąg jest arytmetyczny, bo każdy następny wyraz jest większy od poprzedniego o $1+2x$, czyli $r = a_2 - a_1 = (2+3x)-(1+x) = 1+2x$

Stąd lewa strona jest sumą 50-ciu wyrazów ciągu arytmetycznego

i $S_{50} = \frac{a_1+a_{50}}{2}\cdot 50 = \frac{(1+x)+(50+99x)}{2}\cdot 50 = (51+100x)\cdot 25 = 1275+2500x$

Zatem $1275+2500x = 275 \Leftrightarrow 2500x = -1000 \,|:2500$

Odp. $\underline{\underline{x=-0{,}4}}$.

Proszę rozwiązać przykład a) zad. 8 s 218.

Rozwiązanie zadania 9 s 218 b)

$a_n = \frac{3+6+9+\ldots+3n}{n+5} = \frac{3(1+2+3+\ldots+n)}{n+5}$

Zauważamy, że $1+2+\ldots+n$ jest sumą n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o $a_1=1$ i $r=1$ stąd $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = \frac{1+n}{2}\cdot n = \frac{n+n^2}{2}$

Zatem $a_n = \frac{3}{n+5}\cdot(1+2+\ldots+n) = \frac{3}{n+5}\cdot\frac{n+n^2}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{(n+5)}$

Aby zbadać monotoniczność ciągu a_n należy wyznaczyć a_{n+1}

$$a_{n+1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{(n+1)\cdot(n+1+1)}{(n+1+5)} = \frac{3}{2}\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{(n+6)}$$

Oraz $a_{n+1}-a_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{(n+6)} - \frac{3}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{(n+5)} = \frac{3}{2}\cdot(n+1)\left[\frac{n+2}{n+6}-\frac{n}{n+5}\right] =$

$$= \frac{3}{2}(n+1)\cdot\left[\frac{(n+2)(n+5)-n(n+6)}{(n+5)(n+6)}\right] = \frac{3}{2}(n+1)\cdot\left[\frac{n^2+7n+10-(n^2+6n)}{(n+5)(n+6)}\right] =$$

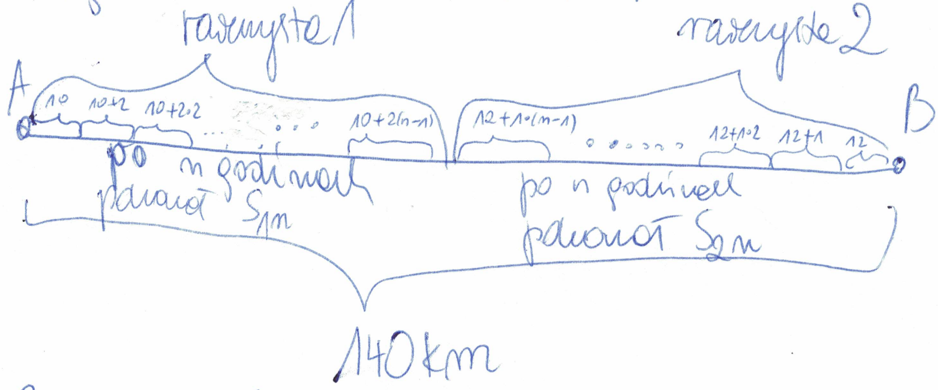
$$= \frac{3}{2}(n+1)\left[\frac{\cancel{n^2}+7n+10-\cancel{n^2}-6n}{(n+5)(n+6)}\right] = \frac{3}{2}\cdot(n+1)\cdot\frac{(n+10)}{(n+5)(n+6)} = \frac{3(n+1)(n+10)}{2(n+5)(n+6)}$$

Zauważmy, że wyrażenie $\frac{3(n+1)(n+10)}{2(n+5)(n+6)}$ jest zawsze dodatnie dla każdej liczby naturalnej dodatniej n, stąd ciąg jest rosnący.

Proszę analogicznie wykonać przykład a) zadania 9.218.

- 9 -

Rozwiązanie zadanie 6 s 218



Rowerzysta 1:

w I godzinie rowerzysta 1 przejechał 10 km, $=a_1$

w drugiej II godzinie -//- -//- $10+2$ [km] $=a_2$

w III -//- -//- -//- $10+2\cdot 2$ [km] $=a_3$

w IV -//- -//- -//- $10+2\cdot 3$ [km] $=a_4$

⋮

w „n"-tej godzinie -//- -//- $10+2\cdot(n-1)$ [km] $=a_n$

Czyli w n godzin przejechał $S_{1n} = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = \frac{10+\overbrace{10+2(n-1)}^{2n-2}}{2}\cdot n = \frac{(18+2n)n}{2}$

Rowerzysta 2:

w I godz. pokonał 12 km $=b_1$

w II godzinie -//- $12+1$ [km] $=b_2$

w III godzinie -//- $12+1\cdot 2$ [km] $=b_3$

⋮

w „n"-tej godzinie -//- $12+1\cdot(n-1)$ [km] $=b_n$

zatem $S_{2n} = \frac{b_1+b_n}{2}\cdot n = \frac{(12+12+n-1)}{2}\cdot n$

$S_{2n} = \frac{(23+n)n}{2}$

Zauważmy, że $S_{1n}+S_{2n}=140 \iff \frac{(18+2n)n}{2}+\frac{(23+n)n}{2}=140 \;/\cdot 2$

$18n+2n^2+23n+n^2=280$

$3n^2+41n-280=0$

$\Delta=1681-4\cdot 3\cdot(-280)=1681+3360=\underline{5041}$

$\sqrt{\Delta}=71$

$n_1=\frac{-41-71}{3\cdot 2}<0$ nie spełnia warunków zadania

$n_2=\frac{-41+71}{3\cdot 2}=5$ godzin

Rowerzyści spotkają się po 5 godzinach